H-123B
c.2

Time Series
Research and Analysis
Division

Division de Recherche et
Analyse
des Chroniques

Canada

H-123B
C.2.

ESTIMATEUR DES CYCLES ÉCONOMIQUES DANS LES SÉRIES SEMESTRIELLES

par Pierre A. CHOLETTE
Statistique Canada

Recherche et analyse des chroniques
Édifice R.H. Coats, 25e étage
OTTAWA (Ont., Canada)
K1A 0T6

(613) 995-3126

janvier 1983

ESTIMATING ECONOMIC CYCLES IN SEMI-ANNUAL SERIES

by Pierre A. CHOLETTE
Statistics Canada

Time Series Research and Analysis
R.H. Coats Building, 25th Floor
Ottawa, Ont., Canada
K1A 0T6

(613) 995-3126

January 1983

83-01-001B

ESTIMATEURS DES CYCLES ÉCONOMIQUES
DANS LES SÉRIES SEMESTRIELLES

- résumé -

Ce travail offre une moyenne mobile qui estime la tendance-cycle et élimine la saisonnalité des séries semestrielles (observables deux fois l'an). La moyenne proposée conserve en entier les cycles de trois ans et plus; 90 % de ceux de deux ans; et 55 % des cycles d'un an et demi. Par comparaison, la moyenne mobile "deux de deux" reproduit respectivement 75 %, 50 % et 25 % des mêmes cycles.

ESTIMATING ECONOMIC CYCLES
IN SEMI-ANNUAL SERIES

- abstract -

This paper presents a moving average which estimates the trend-cycle while eliminating seasonality from semi-annual series (observed twice yearly). The proposed average retains all cycles which last three years or more; 90% of those of two years; and 55% of cycles of one year and a half. By comparison, the "two by two" moving average reproduces respectively 75%, 50% and 25% of the same cycles.

INTRODUCTION

Il existe apparemment des séries semestrielles auxquelles ne correspond aucune donnée mensuelle. Dans pareil cas, l'obtention des chiffres désaisonnalisés semestriels à partir de valeurs mensuelles désaisonnalisées s'avère impossible. À notre connaissance, il n'existe aucune méthode de désaisonnalisation pour les séries semestrielles non plus.

Ce travail présente une moyenne mobile qui élimine la saisonnalité et calcule la tendance-cycle des séries semestrielles. L'approche de minimisation quadratique empruntée remonte à Whittaker (1923) et fut ensuite reprise par Leser (1961 et 1963), Cholette (1980), Schlicht (1981) et par d'autres.

La moyenne obtenue a cinq termes. Elle comprend une pondération centrale pour les semestres centraux des séries; et deux pondérations terminales pour les deux premiers et derniers semestres. Par conséquent, il n'y a donc pas de perte d'observations aux extrémités des séries, comme avec la moyenne mobile "deux de quatre" (utilisée pour les séries trimestrielles) par exemple.

Les performances spectrales de la pondération centrale s'avèrent supérieures à celles de la moyenne mobile "deux de deux", qui vient d'abord à l'esprit pour traiter des séries semestrielles. Les performances des pondérations terminales seront aussi examinées.

INTRODUCTION

In some cases, semi-annual series exist for which there are no corresponding monthly data. In such instances, one cannot derive the seasonally adjusted semi-annual series from the monthly seasonally adjusted values. In addition, to our knowledge, there are no seasonal adjustment methods for semi-annual series.

This paper presents a moving average which eliminates seasonality and estimates the trend-cycle of semi-annual series. The approach of quadratic minimization used originates with Whittaker (1923) and was further developped by Leser (1961 and 1963), Cholette (1980), Schlicht (1981) and others.

The average derived has five terms and comprises a set of central weights for the semestres (half-years) at the centre of series; and two sets of end weights, for the two first and last semestres. Consequently there is no loss of estimates at the ends of series, as with the "two by four" moving average (used for quarterly series) for instance.

The spectral performances of the central weights prove to be superior to those of the "two by two" moving average, which first comes to mind as a way of processing semi-annual series. The performances of the end weights will also be examined.

1. ILLUSTRATION DE LA MOYENNE

La figure 1 montre la série semestrielle originale observée (en tirets) de 1966 à 1980, accompagnée de la tendance-cycle (ligne continue) estimée à l'aide de la moyenne cyclique semestrielle présentée dans ce travail. Comme espéré, la tendance-cycle se comporte de manière lisse et manifeste des cycles assez rapides, notamment un cycle de trois ans, allant du deuxième semestre de 1977 au premier semestre de 1980. On trouve un estimé pour chaque observation. Avec la "deux de deux", on n'aurait pas d'estimé pour le premier et le dernier semestres de la série, parce que cette moyenne mobile n'a pas de pondération terminale. Les deux premiers et derniers estimés de la tendance-cycle originent des pondérations terminales et leur comportement semble plausible.

1. ILLUSTRATION OF THE AVERAGE

Figure 1 shows the observed semi-annual original series (dotted line) along with the trend-cycle (solid line) estimated by the semi-annual cyclical average presented in this paper. As expected, the trend-cycle behaves smoothly and displays quite rapid fluctuations, namely a three-year cycle extending from the second semestre (half-year) of 1977 to the first of 1980. An estimate is available for each observation. No estimates would be available for the first and the last semestres of the series with the "two by two", because this moving average has no end weights. The first two and last two estimates of the trend-cycle originate from the sets of end weights and their behaviour seems plausible.

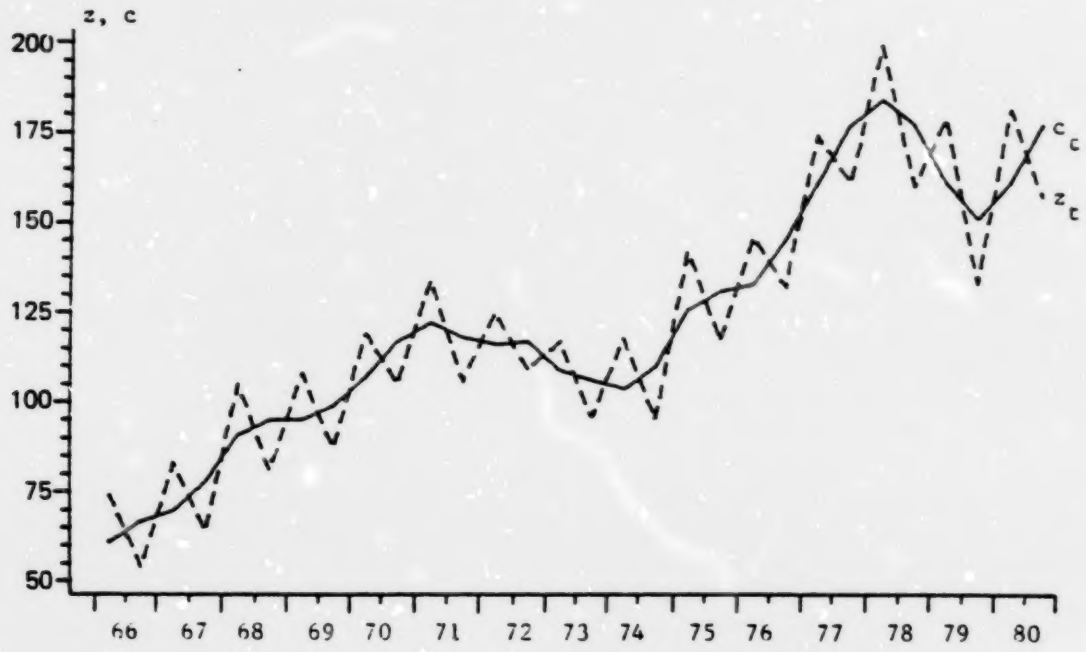

Figure 1 Série semestrielle avec saisonalité (----) et tendance-cycle (_____) estimée par la moyenne mobile cyclique semestrielle proposée

Figure 1 Semi-annual seasonal series (----) and its trend-cycle (_____) by the proposed semi-annual cyclical moving average

2. POIDS DE LA MOYENNE

Le tableau 1-A consigne les valeurs exactes des poids de la moyenne mobile semestrielle cyclique utilisée. La première rangée donne les poids centraux "modifiés" servant aux estimés des périodes 3 à 28 (dans la figure 1); la deuxième, les poids terminaux servant à l'avant-dernier estimé; et la troisième, au dernier estimé. Le tableau 1-B montre les poids centraux trouvés selon la méthodologie exposée à la section 4. Cependant, nous avons jugé bon de les remplacer par les poids centraux "modifiés" du tableau 1-A pour des raisons à élucider plus bas.

2. WEIGHTS OF THE AVERAGE

Table 1-A displays the exact values of the weights of the semi-annual cyclical moving average used. The first row gives the "modified" central weights pertaining to estimates 3 to 28 (in Figure 1); the second, the end weights pertaining to the second-last estimate; and, the third, to the last estimate. Table 1-B shows the central weights derived according to the methodology of Section Four. We judged however these should be replaced by the "modified" central weights of Table 1-A for reasons to be explained.

TABLEAU 1-A Poids exacts de la moyenne cyclique semestrielle proposée

TABLE 1-A Exact weights of the proposed semi-annual cyclical average

pondération centrale modifiée	-0.1000	0.2500	0 7000	0.2500	-0.1000	modified central weights
avant-dernière pondération	0.0625	-0.2500	0 3750	0.7500	0.0625	second-last set of weights
dernière pondération	-0.0625	0.2500	-0 3750	0.2500	0.9375	last set of weights

TABLEAU 1-B Pondération centrale non modifiée

TABLE 1-B Unmodified central weights

-0.0625	0.2500	0 6250	0.2500	-0.0625	

3. ANALYSE SPECTRALE DE LA MOYENNE

Les courbes des figures 2 et 3 représentent les fonctions de gain de la pondération étudiée. La valeur du gain en ordonnée indique en pourcentage la fraction des ondulations sinusoidales conservées, c'est-à-dire "passées" aux estimés par la pondération (Laroque, 1977; Wallis, 1982). La fréquence des ondulations apparaît en abscisse et varie de 1/60 à 30/60. La fréquence 30/60 correspond à une ondulation annuelle de deux semestres (60/30), c'est-à-dire à la saisonnalité stable. La saisonnalité mobile est prise en compte par les quelques fréquences quasi-annuelles voisines: 29 et 28/30.

3. SPECTRAL ANALYSIS OF THE AVERAGE

The curves of Figures 2 and 3 represent the gain functions of the set of weights analysed. The gain value on the ordinate indicates the percentual fraction of the sinusoidal waves preserved, that is "passed" to the estimates, by the weights. The frequency of these waves is shown on the abscissa and varies from 1/60 to 30/60. Frequency 30/60 corresponds to the annual wave of two semestres (60/30), that is to stable seasonality. Moving seasonality is accounted for by a few neighbouring quasi annual frequencies: 29 and 28/60.

La fréquence 20/60 correspond à une ondulation de trois semestres (60/20); la fréquence 15/60, quatre semestres; 12/60, cinq semestres; 10/60, six semestres, etc. Les fréquences associées à des ondulations de trois semestres (1 an ½) et plus appartiennent à la tendance-cycle des séries et constituent les fréquences cibles de l'estimateur.

Les fréquences de 21 à 27/60, associées à des fluctuations de périodicités inférieures à un an et demi et supérieures aux périodicités saisonnières quasi-annuelles, correspondent à la composante aléatoire des séries. Une moyenne cyclique idéale devrait conserver 100 % des fréquences cycliques et 0 % des autres fréquences saisonnières et aléatoires.

a) analyse de poids centraux

La courbe continue de la figure 2 montre que la pondération centrale modifiée de la moyenne cyclique semestrielle conserve 100 % des toutes les ondulations de 5 semestres (2 ans et demi) et plus. En effet, la courbe réside au-dessus de 100 % partout à gauche de la fréquence 12/60. En comparaison, la moyenne mobile "deux de deux", représentée par la courbe pointillée, conserve seulement 65 % des ondulations de 5 semestres et 93 % de celles de 10 semestres. La pondération centrale modifiée passe en outre 55 % des ondulations de 3 semestres et 90 % de celles de 4 semestres (2 ans), contre 25 et 50 % respectivement pour la deux de deux. Les deux pondérations éliminent complètement la saisonnalité stable et mobile avec des gains valant zéro autour aux fréquences saisonnières 30 à 28/60. On peut par conséquent affirmer que la pondération centrale modifiée de la moyenne est clairement préférable à la "deux de deux", puisque ces moyennes visent à reproduire le cycle économique et à éliminer la saisonnalité.

La courbe en tirets de la figure 2 représente le gain de la pondération

Frequency 20/60 corresponds to a three (60/20) semestre wave; frequency 15/60, four semestres; 12/60, to five semestres; 10/60, six semestre, etc. Frequencies associated with waves of three semesters (1½ years) or more pertain to the trend-cycle of series and constitute the target frequencies of the estimator.

Frequencies 21 to 27/60, associated with fluctuations of periodicity less than one and a half years and superior to the quasi-annual seasonal frequencies, pertain to the irregular component of series. An ideal cyclical average should preserve 100% of these cyclical frequencies and 0 % of all other frequencies.

a) Analysis of central weights

The solid curve of Figure 2 shows that the modified central weights of the semi-annual cyclical average preserves 100% of all waves of five semestres (2½ years) and more: everywhere on the left of frequency 12/60 is the curve located above 100%. By comparison, the "two by two" moving average, represented by the dotted curve, only preserves 65% of the 5-semestre waves and 93% of the 10-semestres waves. Furthermore, the modified central weights passes 55% of 3-semestre waves and 90% of 4-semestre (2-year) waves; against 25 and 50% respectively for the two by two. Both sets of weights completely eliminate stable and moving seasonality, with gain valued at zero for the seasonal frequencies 30 to 28/60. It can consequently be asserted that the modified central weights of the average clearly outperforms the two by two, since both aim at reproducing cyclical economic fluctuations and at eliminating seasonality.

The dashed curve of Figure 2 represents the gain of the unmodified

centrale non modifiée de la moyenne cyclique semestrielle, telle qu'obtenue dans la section 4. Sa performance est en tous points supérieure à celle de la "deux de deux"; mais, inférieure à celle de la pondération centrale modifiée. Par exemple cette dernière reproduit 101 % des ondulations de 5 semestres (fréquences 12/60) contre 88 % pour la non modifiée. Quant à l'amplification de 5 % (gain de 105 %) enregistrée par la pondération modifiée à l'ondulation de 6 semestres (fréquence 10/60), nous la pensons préférable à une réduction comparable de 6 % (gains de 94 %) avec la pondération non modifiée. En effet, l'analyste a une meilleure chance de détecter un signal amplifié dans une série qu'un signal atténué.

b) analyse des poids terminaux - Idéalement, les gains des pondérations terminales devraient être identiques au gain de la pondération centrale. Dans pareil cas, les poids terminaux et centraux auraient le même effet sur la série traitée (sauf pour de possibles déphasages).

Le gain de la pondération relative à l'avant-dernier estimé (courbe pointillée) de la figure 3 est assez semblable au gain de la pondération centrale modifiée (courbe continue). À remarquer que le premier ressemble davantage au dernier qu'au gain de la pondération centrale non modifiée de la figure 2. C'est pourquoi nous avons modifié cette pondération.

La pondération associée à l'avant-dernier estimé conserve les fréquences cycliques et élimine la saisonnalité stable. Cependant, elle préserve 11 et 21% des fréquences de saisonnalité mobile 29 et 28/60; et, encore plus des fréquences aléatoires. Du point de vue du gain, la pondération relative à l'avant-dernier estimé devrait donner des estimés moins fiables que la pondération centrale modifiée.

central weights of the semi-annual cyclical average, as obtained from Section 4. Its performance proves superior, in all respects, to that of the "two by two"; but, inferior to that of the modified central weights. For instance, the latter reproduces 101% of the 5-semestre waves (frequency 12/60) against 88% for the unmodified. The amplification of 5% (gain of 105%), at the 6-semestre (frequency 10/60) wave with the modified central weights, seems to us preferable to a comparable reduction of 6% (gain of 94%) with the unmodified set of weights. Indeed the analyst stands a better chance to detect an amplified signal in a series than a reduced signal.

b) analysis of the end weights - Ideally, the gains of the end weights should be identical to the gain of the central weights. In such a case, end and central weights would have the same effect on the processed series (except for possible phase-shifts).

The gain of the weights relative to the second-last estimate (dotted line) of Figure 3 is quite similar to the gain of the modified central weights (solid curve). Note that the former is more similar to the latter than to the set of unmodified central weights of Figure 2. This the reason why we modified the weights.

The weights of the second-last estimate preserve the cyclical frequencies and eliminate the stable seasonal frequency. However, they preserves 11 and 21% of the moving seasonality frequencies 29 and 28/60; and, even more of the noise frequencies. From the view point of the gain, the weights of the second-last estimate should yield less reliable estimates than the modified central weights.

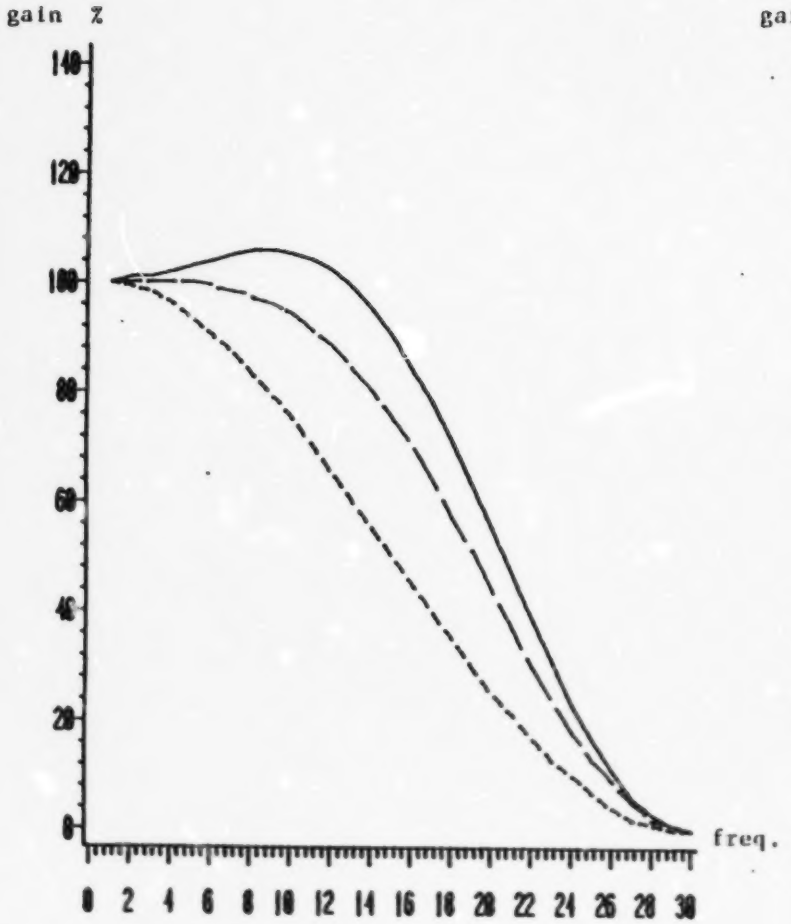

Figure 2 Fonctions de gain des pondérations centrales modifiée (____) et non-modifiée (----) de la moyenne cyclique semestrielle proposée et de la deux de deux (....)

Figure 2 Gain functions of the modified (____) and non-modified (----) central weights of the proposed semi-annual cyclical average and of the two by two (....)

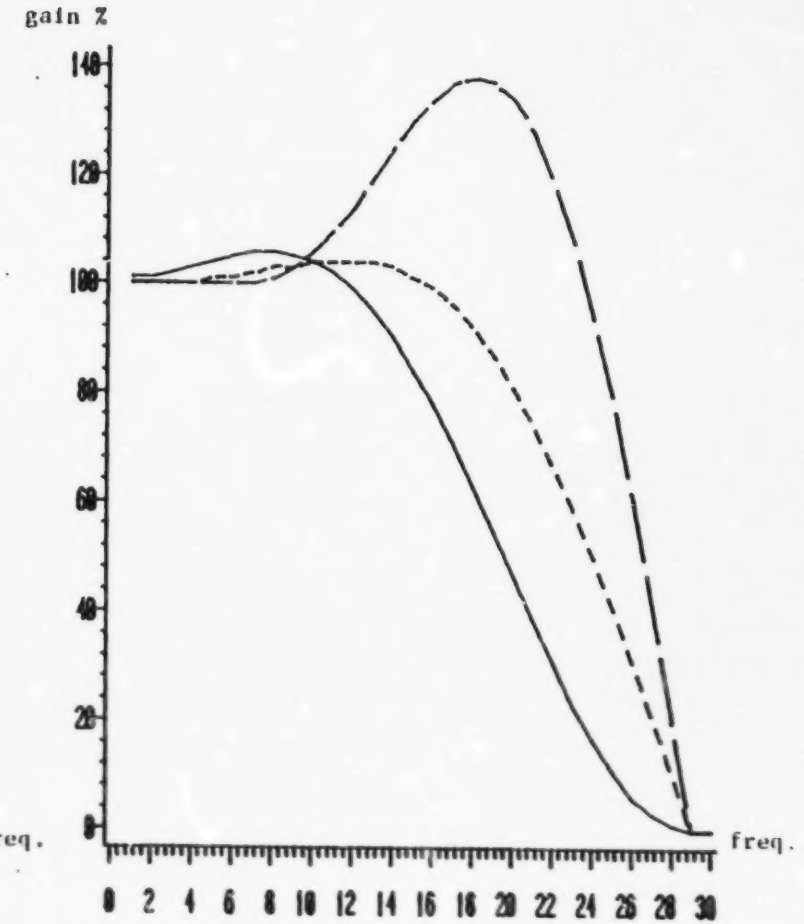

Figure 3 Fonctions de gain de la pondération centrale modifiée (____) et des pondérations relatives à l'avant-dernier (....) et au dernier (----) estimés

Figure 3 Gain functions of the modified central weights (____) and of the weights for the one-before-last (....)and the last (----) estimates

La situation se dégrade davantage pour la pondération relative au dernier estimé (ligne en tirets de la figure 3). On observe une forte amplification de certaines fréquences aléatoires et cycliques rapides (gains atteignant parfois 137 %). Il faut par conséquent exercer énormément de prudence dans l'interprétation de l'estimé résultant de ces poids. Il y aurait peut-être lieu de rejeter le dernier estimé complètement pour les séries réputées irrégulières (contenant ces fréquences amplifées).

The situation gets worse for the set of weights relative to the last estimate (broken line in Figure 3). Here, a strong amplification of some noise and fast cyclical frequencies is observed (gains reaching up to 137%). Extreme caution should then be exercized in interpreting the estimate yielded by these weights. One should perhaps disregard the last estimate completely, for series which are reputed to be irregular (containing those magnified frequencies).

Tableau 2 Déphasages enregistrés par les pondérations terminales à certaines fréquences d'intérêt en nombre de semestres

Table 2 Phase-shifts observed in number of semestres for the sets of end weights at certain selected frequencies

	avant dernier / second-last	dernier / last	
fréquences cyliques:			cyclical frequencies:
6/60 (10 semestres)	0.01	0.01	6/60 (10 semestres)
10/60 (6 semestres)	0.05	0.05	10/60 (6 semestres)
12/60 (5 semestres)	0.09	0.05	12/60 (5 semestres)
15/60 (4 semestres)	0.16	0.00	15/60 (4 semestres)
20/60 (3 semestres)	0.28	0.17	20/60 (3 semestres)
fréquences saisonnières:			seasonal frequencies:
28/60	0.46	0.45	28/60
29/60	0.48	0.47	29/60
30/60 (2 semestres)	0.50	0.50	30/60 (2 semestres)

Comme on peut le voir dans le tableau 1, les pondérations terminales ne sont pas symétriques. Elles engendrent par conséquent des déphasages, consignés en nombre de semestres dans le tableau 2, pour certaines fréquences d'intérêt. Aux fréquences cycliques cibles, le déphasage s'avère modérément faible pour l'avant-dernière pondération. Dans ce dernier cas, une ondulation cyclique de cinq semestres accusera un retard de 0.09 semestre dans les estimés; une de quatre semestres, de 0.16 semestre; et une de trois semestres, de 0.28 semestre; etc.

As seen in Table 1, the end sets of weights are not symmetric. Consequently, they cause phase-shifts, which are compiled in number of semestres in Table 2 for certain selected frequencies. At the target cyclical frequencies, a small phase-shift is observed for the second-last weights. In this case, a cyclical wave of five semestres will be delayed by 0.09 semestres in the estimates; one of four semestres, by 0.16 semestres; and one of three semestre, by 0.28 semestres; etc.

Le déphasage atteint son maximum à la fréquence saisonnière fondamentale (30/60). Mais ceci n'a aucune importance pour celle-ci, puisque la pondération

The phase-shift reaches its maximum at the fundamental seasonal frequency (30/60). This does not matter however, since the frequency

l'élimine complètement. Le déphasage importe davantage pour les fréquences de saisonnalité mobile 29 et 28/60, qui ne sont pas complètement éliminées.

4. ÉTABLISSEMENT DES POIDS DE LA MOYENNE CYCLIQUE SEMESTRIELLE

La série observée z_t comprend la tendance-cycle c_t à estimer et un résidu saisonnier-irrégulier s_t+e_t $(=z_t-c_t)$:

(1) $$z_t = c_t + (s_t + e_t), \quad t,=1,\ldots,5. \qquad (1)$$

Suivant l'approche de Leser (1961 et 1963) et de Cholette (1980), la tendance-cycle recherchée minimise la somme quadratique de quadruples différences (premier terme de (2)). Sur l'intervalle d'estimation de cinq semestres, la composante s'approxime donc autant que possible à un polynôme temporel du troisième degré. Cette spécification permet l'estimation sur l'intervalle d'un cycle économique complet avec ses quatre phases d'expansion, de retournement, de récession et de reprise.

Les résidus saisonniers-irréguliers (z_t-c_t) minimisent la somme quadratique des premières différences saisonnières sur semestres homologues (deuxième terme de (2)). Cette spécification signifie que le résidu saisonnier-irrégulier d'un semestre doive ressembler le plus possible au résidu correspondant au même semestre de l'année voisine.

Les résidus saisonniers-irréguliers minimisent en outre la somme quadratique de leurs sommes sur deux semestres consécutifs (troisième terme de (2)). Ce critère indique que la saisonnalité de deux semestres successifs devrait s'annuller et que l'irrégularité ne devrait pas affecter le niveau de la tendance-cycle recherchée.

Ces trois critères spécifiés pour les composantes se combinent en la fonction objective suivante:

is totally eliminated by the weights. It does matter more for the moving seasonality frequencies 29 and 28/60 however, since they are not completely eliminated.

4. CALCULATION OF THE WEIGHTS OF THE SEMI-ANNUAL CYCLICAL AVERAGE

The observed series z_t comprises the trend-cycle c_t to be estimated and a seasonal-irregular residual s_t+e_t $(=z_t-c_t)$:

Following the approach of Leser (1961 and 1963) and of Cholette (1980), the desired trend-cycle minimizes the quadratic sum of fourth differences (first term of (2)). On the five-semestre estimation interval, the component as much as possible approximates to a time polynomial of the third degree. This specification allows for a full economic cycle with its four phases of expansion, turning-point, recession and recovery over the interval.

The seasonal-irregular residual (z_t-c_t) minimizes the quadratic sum of first seasonal differences taken on corresponding semestres (second term of (2)). This specification means that the seasonal-irregular residual of one semestre should resemble that of the same semestre in the neighbouring year as much as possible.

Furthermore, the seasonal-irregular residuals minimize the quadratic sum of their sums on two consecutive semestres (third term of (2)). This criterion indicates that the seasonality of two neighbouring semestres should cancel out and that the irregularity should not affect the level of the desired trend-cycle.

The three criteria specified for the components combine into the following objective function:

$$f(c) = \sum_{t=5}^{5} (c_t - 4c_{t-1} + 6c_{t-2} - 4c_{t-3} + c_{t-4})^2$$

(2)

$$+ \sum_{t=3}^{5} ((z_t - c_t) - (z_{t-2} - c_{t-2}))^2 + \sum_{t=2}^{5} ((z_t - c_t) + (z_{t-1} - c_{t-1})^2 \qquad (2)$$

On peut reprendre l'équation (2) en algèbre linéaire:

Equation (3) can be rewritten in linear algebra:

$$f(Z) = C'A'AC + (Z-C)'B'B(Z-C) + (Z-C)'F'F(Z-C)$$

(3)

$$= C'HC + (C-Z)'G(C-Z) \qquad (3)$$

où A, B et F désignent respectivement les opérateurs matriciels de quadruples différences, de premières différences saisonnières et de sommes annuelles reproduites en appendice.

where A, B and C respectively stand for the matrix operators of quadruple differences, first seasonal differences and annuals sums reproduced in Appendix.

Les équations normales associées à (3) s'écrivent

The normal equations associated to (3) read

(4) $$dF / dC = 2H C + 2G (C-Z) = 0 \qquad (4)$$

et impliquent la solution:

and imply solution:

(5) $$C = (H+G)^{-1} G Z = W Z \qquad (5)$$

La troisième rangée de la matrice W contient la pondération centrale non modifiée de la moyenne cyclique semestrielle du tableau 1-B; et les quatrième et cinquième rangées, les poids terminaux des rangées 2 et 3 du tableau 1-A.

The third central row of matrix W contain the non-modified central weights of the semi-annual cyclical average of Table 1-B; and the fourth and fifth row, the end weights of rows 2 and 3 of Table 1-A.

5. HISTORIQUE DES MOYENNES PAR MINIMISATION QUADRATIQUE

Cette approche de minimisation quadratique provient de Whittaker (1923). Leser (1961 et 1963) montra comment la minimisation quadratique pouvait servir à mettre au point des moyennes mobiles cycliques. Cholette (1980) proposa des substituts aux moyennes mobiles de douze et deux de quatre. Ces substituts furent incoporporés dans la méthode de désaisonnalisation X-11-ARMMI de Dagum (1980) à titre optionnel.

5. HISTORY OF MOVING AVERAGES BY QUADRATIC MINIMIZATION

This approach of quadratic minimization originates with Whittaker (1923). Leser (1961, 63) showed how quadratic minimization could be applied to develop cyclical moving averages. Cholette (1980) proposed substitutes for the two by twelve and the two by four moving averages. These substitutes were incorporated into the Dagum (1980) seasonal adjustment programme as optional.

La moyenne cyclique semestrielle présentée dans ce travail pourrait aussi être incorporée dans une méthode du genre X-11 (ou X-11-ARMMI). Ceci permettrait la désaisonnalisation des séries semestrielles et le calcul exact de leurs facteurs saisonniers grâce aux moyennes mobiles saisonnières traditionnelles.

Reprenant la minimisation quadratique, certains auteurs, notamment Ishiguro et Akaike (1980) et Schlicht (1981), ont proposé des méthodes complètes de désaisonnalisation simultanée. Les fonctions objectives spécifiées incluent toutes les composantes des séries et couvrent plusieurs années. Ces méthodes sont encore expérimentales.

The semi-annual cyclical average presented in this paper could also be incorporated in a seasonal adjustment method of the X-11 type. This would allow seasonally adjusting semi-annual series and the exact calculation of the seasonal factors by means of the traditional seasonal moving averages.

Resuming quadratic minimization, some authors, namely Ishiguro and Akaike (1980) and Schlicht (1981) proposed entire simultaneous seasonal adjustment methods following the same approach. The objective functions specified include all the series components and cover several years. These methods are still experimental.

Appendice: Matrices A, B et F de l'équation (2)

Appendix: Matrices A, B and F of equation (2)

$$A_{1x5} = [\,1\ -4\ \ 6\ -4\ \ 1\,], \quad B_{3x5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad F_{4x5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

RÉFÉRENCES / REFERENCE

- Akaike, H, Ishiguro, M (1980), "BAYSEA, a Bayesian Seasonal Adjustment Program", The Institute of Statistical Mathematics, Computer Science Monograph No. 13, Tokyo.

- Box, J.E.P., Jenkins, G.M. (1970), Time Series Analysis, Forecasting and Control, Holden-Day.

- Cholette, P.A. (1980), "A Comparison of Various Trend-Cycle Estimators" in Time Series Analysis, O.D. Anderson and M.R. Perryman Eds, North Holland, pp. 77-87.

- Dagum, E.B. (1980), La méthode de désaisonnalisation X-11-ARMMI, Statistique Canada, cat. 12-564F; The X-11-ARIMA Seasonal Adjustment Method, Statistics Canada, cat. 12-564E.

- Koopmans, L.H. (1974), The Spectral Analysis of Time Sries, Academic Press.

- Laroque, G. (1977), "Analyse d'une méthode de désaisonnalisation: le programme X-11 du U.S. Bureau of the Census, version trimestrielle", Annales de l'I.N.S.E.E, vol. 28, pp. 105-127

- Leser, C.E.V. (1961), "a Simple Method of Trend Construction", J.R.S.S. series B, Vol 23, pp. 91-107.

- Leser, C.E.V. (1963), "Estimation of Quasi-Linear Trend and Seasonal Variation", J.A.S.A., Vol. 58, pp. 1033-1043

- Macauly, F.R. (1931), The Smoothing of Time Series , National Bureau of Economic Research, Washington

- Philips. L, Blomme, R. (1973), Analyse chronologique, éd. Vander, Louvain, 334 p.

- Schlicht, E. (1981), "A Seasonal Adjustment Principle and a Seasonal Adjustment Method Derived from this Principle", J.A.S.A., Vol. 76, No. 374, pp. 374-378.

- Shiskin, J., Young, A.H, Musgrave, J.C (1967), The X-11 Variant of the Census Method II Seasonal Adjustment Program, U.S. Bureau of the Census, Tecnical Paper No. 15.

- Whitakker, E. (1923), "On a New Method of Graduation", Proceedings of the Edinburg Mathematical Society, Vol. 41, pp. 63-75.